

レート分割法による多重アクセス通信の誤り指数について

太田 陽基<sup>†</sup> 植松 友彦<sup>†</sup>(正員)

On error exponent of rate-splitting multiple accessing scheme for Gaussian multiple-access channel

Haruki Ota<sup>†</sup>, Nonmember and Tomohiko Uyematsu<sup>†</sup>, Member

<sup>†</sup> 東京工業大学大学院集積システム専攻, 東京都  
Dept. of Communications and Integrated Systems, Tokyo  
Institute of Technology, Ookayama, Meguro-ku, Tokyo, 152-  
8552 Japan

あらまし レート分割多重アクセス法は, 符号分割多重アクセス方式の一方式である. 小文では, 2 ユーザの多重アクセス通信路に対して, 達成可能領域の内点における新しいレート分割法を提案し, 提案したレート分割法によって得られる誤り指数の上界と下界を計算している.

キーワード 誤り指数, 多重アクセス通信路, レート分割多重アクセス, 符号分割多重

### 1. ま え が き

移動体通信ネットワークのアップリンクや衛星通信などに用いられている通信路のモデルとして, 多重アクセス通信路が知られている. ガウス雑音を伴う多重アクセス通信路に対する符号化法として, Rimoldi と Urbanke は, 達成可能領域内のレートを分割して伝送を行う, レート分割多重アクセス (Rate-Splitting Multiple Accessing: RSMA) という方式を提案し, レート分割を行わない場合と同一の容量が達成できることを示した [1]. しかしながら, Rimoldi と Urbanke は, 達成可能領域の境界上におけるレート分割法を示しているだけで, 達成可能領域の内点におけるレート分割の方法を明らかにしていない. しかも, ガウス雑音を伴う多重アクセス通信路におけるレート分割法の誤り指数の上界や下界は示されていない.

小文では, ガウス雑音を伴う多重アクセス通信路に対して, 達成可能領域の内点において誤り指数の下界を最大にするようにレートを定める新しいレート分割法を提案する. 更に, レート分割法で達成可能な誤り指数の上界を求め, 提案したレート分割法の誤り指数の下界, ならびにレート分割を行わない場合の誤り指数の下界と比較している.

### 2. 多重アクセス通信路

入力  $x_1, \dots, x_M \in \mathbf{R}$  に対し, 出力  $y \in \mathbf{R}$  が,

$$y = \sum_{i=1}^M x_i + z$$

で与えられる通信路をガウス雑音を伴う多重アクセス通信路という [2]. 但し,  $\mathbf{R}$  は実数の集合を表し, 各入力  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, M$ ) は 2 乗平均値が  $P_i$  以下に制約されている (パワー制約と呼ぶ) とする. また, 雑音  $z$  は各入力と独立で, 平均零で分散  $\sigma^2$  のガウス分布に従うランダム変数とする. 以下, 特に断らない限り, ガウス雑音を伴う多重アクセス通信路のみを取り扱う.

次の定理は, 多重アクセス通信路の達成可能領域を表している [3], [4].

[定理 1] (多重アクセス通信路の達成可能領域)

ユーザ  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, M$ ) のパワー制約が  $P_i$  であることを,  $(P_1, \dots, P_M)$  によって表す. 雑音分散  $\sigma^2$  を有する多重アクセス通信路に対し,

$$\sum_{i \in S} R_i \leq C \left( \sum_{i \in S} P_i, \sigma^2 \right) \quad \forall S \subseteq \{1, \dots, M\}$$

を満たす非負の要素から成るレート  $M$ -タプル  $R = (R_1, \dots, R_M) \in \mathbf{R}^M$  の集合によって達成可能領域を定める. 但し,  $C(\cdot)$  は, 雑音分散  $\sigma^2$  を有するガウス雑音通信路に対して, 送信パワーを  $P$  に制約したとき,

$$C(P, \sigma^2) = \frac{1}{2} \ln \left[ 1 + \frac{P}{\sigma^2} \right]$$

によって表されるガウス雑音通信路の通信路容量である [5]. このとき, 達成可能領域内のレートに対しては, 符号長を長くするにつれて, 復号誤り率が 0 に近づく符号が存在する. 逆に, 達成可能領域外のレートに対しては, どのような符号を用いても, 符号長を長くするにつれて, 復号誤り率が 1 に近づく. □

特に, 2 ユーザの場合の達成可能領域は,

$$\left. \begin{aligned} 0 &\leq R_1 \leq C(P_1, \sigma^2) \\ 0 &\leq R_2 \leq C(P_2, \sigma^2) \\ R_1 + R_2 &\leq C(P_1 + P_2, \sigma^2) \end{aligned} \right\}$$

となる.

以下, 小文では, 便宜上ユーザ数を 2 に制限して議論を行う.

### 3. レート分割多重アクセス

本章では、具体的なレート分割 (RSMA) 法による符号化と復号化について述べる [1]。RSMA 法では、 $M$  ユーザのうち  $M - 1$  ユーザのレートを 2 分割し、 $2M - 1$  個の符号を用いて多重アクセス通信を行う。以下では、便宜上ユーザ数を 2 に制限して説明を行う。

#### 3.1 レート分割 (RSMA) 法の符号化

2 ユーザのレート分割法による多重アクセスシステムを図 1 に示す。このシステムでは、ユーザ 1 のレート  $R_1$  を 2 つのレート ( $r_1, r_3$ ) に分割する ( $r_1 + r_3 = R_1$ )。これに伴い、ユーザ 1 の送信メッセージ  $m_1$  を 2 つのメッセージ  $m'_1$  と  $m'_3$  に分割し、それぞれレート  $r_1$  の符号器  $\varphi'_1$  およびレート  $r_3$  の符号器  $\varphi'_3$  によって符号化した後、白色ガウス雑音を伴う多重アクセス通信路に送信する。他方、ユーザ 2 の送信メッセージ  $m_2$  は分割せずにレート  $R_2 = r_2$  の符号器  $\varphi_2$  によって符号化し、多重アクセス通信路に送信する。復号器  $\psi$  は、受信語から 3 つの送信メッセージの推定値  $\hat{m}'_1, \hat{m}'_3, \hat{m}_2$  を出力する。

Rimoldi と Urbanke は、次のようなレート分割法を提案している [1]。いま、任意のパワー制約 ( $P_1, P_2$ ) と雑音分散  $\sigma^2$  について

$$\left. \begin{aligned} C_1 &< C(P_1, \sigma^2) \\ C_2 &< C(P_2, \sigma^2) \\ C_1 + C_2 &= C(P_1 + P_2, \sigma^2) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

を満足する任意のレート対 ( $C_1, C_2$ ) を考える。ここで、 $\delta > 0$  を

$$C_2 = C(P_2, \sigma^2 + \delta)$$

を満足する唯一の値として定める。このとき、雑音分散  $\sigma^2$  を有する 3 入力の多重アクセス通信路を考え、この通信路に対するパワー制約  $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$

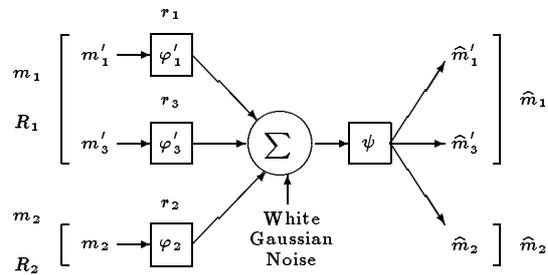


図 1 レート分割多重アクセスシステム  
Fig. 1 Rate-splitting multiple accessing scheme.

とレートタプル ( $c_1, c_2, c_3$ ) を

$$\begin{cases} p_1 = \delta \\ p_2 = P_2 \\ p_3 = P_1 - \delta \end{cases} \begin{cases} c_1 = C(p_1, \sigma^2) \\ c_2 = C(p_2, \sigma^2 + p_1) \\ c_3 = C(p_3, \sigma^2 + p_1 + p_2) \end{cases} \quad (2)$$

によって定める。このとき、容易に分かるように、

$$\begin{aligned} c_1 + c_3 &= C_1 \\ c_2 &= C_2 \end{aligned}$$

が成り立つ。従って、ユーザ 1 は、レート  $c_1$  および  $c_3$  の 2 種の符号を用いることで、レート  $C_1$  での通信が可能である。尚、実際に用いるレート  $c_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) の符号は、平均零、分散  $p_i$  を有するガウス分布に従うランダム符号化によって構成する。

ここで注意することは、Rimoldi と Urbanke は、式 (1) の 3 番目の式の等号の成立を仮定していることである。従って、達成可能領域の内点で表されるレート対、すなわち

$$\left. \begin{aligned} C_1 &< C(P_1, \sigma^2) \\ C_2 &< C(P_2, \sigma^2) \\ C_1 + C_2 &< C(P_1 + P_2, \sigma^2) \end{aligned} \right\}$$

を満足するレート対 ( $C_1, C_2$ ) に対するレート分割の方法は未知である。

#### 3.2 RSMA 法の復号化

RSMA 法の復号は、次のように行われる。まずレート  $c_3$  の符号が雑音 ( $\sigma^2 + p_1 + p_2$ ) を有するガウス雑音通信路を通じて送られたとみなして、レート  $c_3$  の符号を復号する。次に、この符号語を受信信号から減じたものを新たな受信信号とし、レート  $c_2$  の符号が雑音 ( $\sigma^2 + p_1$ ) を有するガウス雑音通信路を通じて送られたとみなして、レート  $c_2$  の符号を復号する。最後に、この符号語を受信信号から減じたものを新たな受信信号とし、レート  $c_1$  の符号が雑音  $\sigma^2$  を有するガウス雑音通信路を通じて送られたとみなして、レート  $c_1$  の符号を復号する。一連の復号の過程において、復号対象としていない符号語を白色ガウス雑音とみなせることが RSMA 法の本質である。

#### 4. 誤り指数に基づく新しいレート分割法

本章では、達成可能領域の内点でも適用可能な新しいレート分割法を提案すると共に、提案した方法に対する誤り指数の下限とレート分割法の誤り指数の上限を求める。以下では、便宜上 2 ユーザの場合について

議論を行うが,  $M$  ユーザの場合でも  $2M - 1$  個の符号の復号の順番さえ定めれば, 提案方法は自然に拡張できる.

#### 4.1 達成可能領域内におけるレート分割法と誤り指数の下界

パワー制約  $(P_1, P_2)$  と達成可能領域内のレート対  $(R_1, R_2)$  が与えられたとき, これらを分割して得られる 3 ユーザのパワー制約とレートタブルを  $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$  と  $(r_1, r_2, r_3)$  によって表す. このとき, これらは制約条件

$$\left. \begin{aligned} p_1 + p_3 &\leq P_1, \quad p_2 \leq P_2 \\ R_1 &= r_1 + r_3, \quad R_2 = r_2 \\ 0 < r_1 < c_1, \quad 0 < r_2 < c_2, \quad 0 < r_3 < c_3 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

を満足する. 但し,  $(c_1, c_2, c_3)$  は式 (2) で定まるレートタブルである. 式 (3) を満たす  $\mathbf{p}$  と  $(r_1, r_2, r_3)$  について,  $i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) 番目の符号を, 符号長  $N$ ,  $\exp(Nr_i)$  個の各符号語を平均零, 分散が式 (3) の  $p_i$  を有するガウス分布に従うランダム符号化によって定めた場合, レート  $r_i$  の符号の誤り指数  $E r'_i(\sigma^2, \mathbf{p}, r_i)$  は,

$$\begin{aligned} E r'_i(\sigma^2, \mathbf{p}, r_i) &= \max_{0 \leq \rho \leq 1} \left\{ \frac{\rho}{2} \ln \left[ 1 + \frac{a_i}{1 + \rho} \right] - \rho r_i \right\} \\ &\quad (i = 1, 2, 3) \end{aligned}$$

で与えられる [6]. 但し, 3.2 で述べた RSMA 法の復号法から

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \frac{p_1}{\sigma^2} \\ a_2 &= \frac{p_2}{\sigma^2 + p_1} \\ a_3 &= \frac{p_3}{\sigma^2 + p_1 + p_2} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

である. 従って, このようなレート分割法を用いたときの誤り指数の下界は

$$E r_{lower}(r_1, r_2, r_3) = \max_{1 \leq i \leq 3} [\min_{1 \leq i \leq 3} E r'_i(\sigma^2, \mathbf{p}, r_i)] \quad (5)$$

で得られる. 但し,  $\max$  は, 式 (3) を満足する  $\mathbf{p}$  および  $(r_1, r_2, r_3)$  に対してとられる. このとき,  $E r_{lower}(r_1, r_2, r_3)$  を達成する  $\mathbf{p}$  と  $(r_1, r_2, r_3)$  をそれぞれ, 提案するレート分割法におけるパワー制約とレートタブルと定める. すなわち, 提案したレート分

割法では, 誤り指数の下界を最大にするようにパワー制約とレートタブルを定めている.

特に, 提案したレート分割法を達成可能領域の境界上で適用した場合, 前章で紹介した Rimoldi と Urbanke の提案したレート分割法と一致する.

#### 4.2 レート分割法の誤り指数の上界

本節では, 提案方法のみならず, 制約条件 (3) を満足する一般的なレート分割法について成立する誤り指数の上界を導出する.

式 (3) を満足する  $\mathbf{p}$  と  $(r_1, r_2, r_3)$  について,  $i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) 番目の符号を, 符号長  $N$ ,  $\exp(Nr_i)$  個の符号語を有する最適な符号とした場合, レート  $r_i$  の符号の誤り指数の上界  $E'_{Li}(\sigma^2, \mathbf{p}, r_i)$  は,

$$\begin{aligned} E'_{Li}(\sigma^2, \mathbf{p}, r_i) &= \inf_{0 < \alpha_i \leq 1} \left[ \frac{a_i}{2(1 - \alpha_i)} - \ln \{G_i(r_i) \exp(-r_i)\} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} G_i(r_i) \sqrt{\frac{a_i}{1 - \alpha_i} \{1 - \exp(-2r_i)\}} \right] \\ &\quad (i = 1, 2, 3) \end{aligned}$$

で与えられる [7]. 但し,

$$\begin{aligned} G_i(r_i) &= \frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{a_i}{1 - \alpha_i} \{1 - \exp(-2r_i)\}} \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{\frac{a_i}{1 - \alpha_i} \{1 - \exp(-2r_i)\} + 4} \right) \\ &\quad (i = 1, 2, 3) \end{aligned}$$

であり,  $a_i$  は式 (4) で定まる. 従って, レート分割法の誤り指数の上界は

$$E r_{upper}(r_1, r_2, r_3) = \max_{1 \leq i \leq 3} [\min_{1 \leq i \leq 3} E'_{Li}(\sigma^2, \mathbf{p}, r_i)] \quad (6)$$

で得られる. 但し,  $\max$  は, 式 (3) を満足する  $\mathbf{p}$  および  $(r_1, r_2, r_3)$  に対してとられる.

#### 5. 誤り指数の比較

本章では, 4. で提案したレート分割法の誤り指数の下界を幾つかの例について数値計算し, レート分割法の誤り指数の上界ならびにレート分割法を用いない場合の誤り指数と比較している. 尚, 実際の通信形態ならびに計算の簡便化を考え, 以下では  $P_1 = P_2 = P$ ,  $R_1 = R_2 = R$  と仮定している.

$P/\sigma^2$  で定まる  $SN$  比が 20[dB] のとき、平均零、分散  $P$  を有するガウス分布に従うランダム符号化によって得られる多重アクセス符号を用いた場合の誤り指数の下界 [2] ( 図中では Gallager と表示 ), 提案したレート分割法によって達成される誤り指数の下界 ( 式 (5), 図中では lower と表示 ) とレート分割法の誤り指数の上界 ( 式 (6), 図中では upper と表示 ) を 図 2 に示す . 他方,  $SN$  比が 30[dB] の場合に対する同様な比較を 図 3 に示す .

図 2 と 図 3 から,  $SN$  比が 20[dB] のときも 30[dB] のときも, 提案したレート分割法の誤り指数の下界 ( lower ) は, 従来の多重アクセス符号を用いた場合の誤り指数の下界 ( Gallager ) のせいぜい 0.45 倍程度であることが分かる . また, いずれの場合も提案したレート分割法によって容量が達成されている . 従って, 提案したレート分割法によって従来法と同一の誤り率を達成するには, 2 倍以上符号長を長くする必要があることが分かる .

一方,  $SN$  比が 20[dB] のとき, レートが 0.28 以上では, 提案したレート分割法の誤り指数の上界 ( upper ) は, 従来の多重アクセス符号を用いた場合の誤り指数の下界 ( Gallager ) よりも小さい . これから, 提案したレート分割法では, 高レートにおいて, 従来の多重アクセス符号で達成される誤り指数を得ることが不可能であることが分かる .  $SN$  比が 30[dB] のときも同様の結論が導ける .

## 6. あとがき

小文では, 多重アクセス通信路に対して, 達成可能領域の内点において誤り指数の下界を最大にするよ

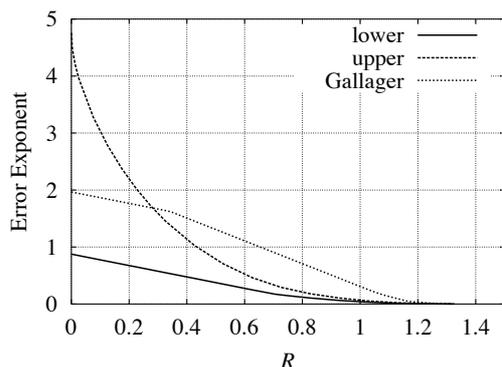


図 2 誤り指数の比較 I ( $S/N = 20$ [dB])

Fig. 2 Comparison of error exponents I ( $S/N = 20$ [dB]).

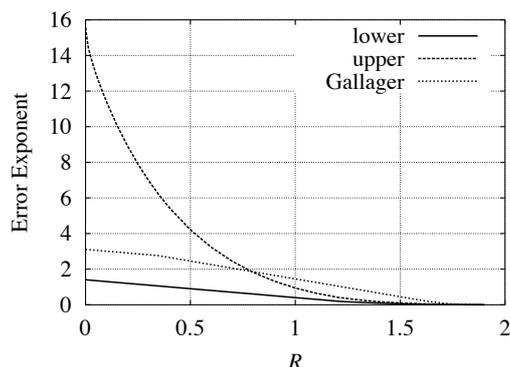


図 3 誤り指数の比較 II ( $S/N = 30$ [dB])

Fig. 3 Comparison of error exponents II ( $S/N = 30$ [dB]).

うにレートを定める新しいレート分割法を提案した . 更に, レート分割法の誤り指数の上界を求め, 提案したレート分割法の誤り指数の下界, ならびに従来の多重アクセス符号を用いた場合の誤り指数の下界と比較を行った .

今後の課題としては, 低レートにおいて, 誤り指数の下界を改善する新たなレート分割法を検討すること等が挙げられる .

## 文 献

- [1] B. Rimoldi and R. Urbanke, "A rate-splitting approach to the Gaussian multiple-access channel," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 42, pp.364-375, Mar. 1996.
- [2] R. G. Gallager, "A perspective on multiaccess channels," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-31, pp.124-142, Mar. 1985.
- [3] R. Ahlswede, "Multi-way communication channels," in *Proc. 2nd Int. Symp. Information Theory*, Tsahkadsor, Armerian S.S.R., 1971, Hungarian Acad. Sc., pp.23-52, 1973.
- [4] H. Liao, "A coding theorem for multiple access communications," in *Proc. Int. Symp. Information Theory*, Asilomar, CA, 1972.
- [5] C. E. Shannon, "A mathematical theory of communication," *Bell System Technical Journal*, vol.27, pp.379-423 and pp.623-656, July and Oct. 1948.
- [6] R. G. Gallager, "Information theory and reliable communication," John Wiley & Sons, 1968.
- [7] C. E. Shannon, "Probability of error for optimal codes in a Gaussian channel," *Bell System Technical Journal*, vol.38, pp.611-656, May 1959.

(平成年月日受付, 月日再受付)